Μάθημα 5ο: Παρασκευή 24/04/20

Ένας εκτιμητής ως συνάρτηση του τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ εξαρτάται και από το μέγεθος του τ.δείγματος. Μας ενδιαφέρει η μελέτη του εκτιμητή όταν το μέγεθος του δείγματος είναι πολύ μεγάλο, $n \to \infty$.

Σε μια τέτοια σχέση ενός εκτιμητή με το μέγεθος του τ.δ. αναφέρεται η ιδιότητα της συνέπειας.

Ορισμός:

Έστω $X_1, \dots X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με κατανομή $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$. Έστω $T_n(X_1, \dots X_n)$ ένας εκτιμητής της $g(\theta)$. Ο $T_n(X_1, \dots, X_n)$ (ή η ακολουθία εκτιμητών $\{T_n(X_1, \dots X_n) : n \geq 1\}$) λέγεται **συνεπής εκτιμητής** του $g(\theta)$ αν:

$$P\left(|T_n(X_1, \dots, X_n) - g(\theta)| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \quad \varepsilon > 0$$

Την λέμε T_n διότι εξετάζω τη συμπεριφορά της αναφορικά με το μέγεθος του δείγματος n.

Διαισθητικά:

Ένας εκτιμητής είναι συνεπής αν η πιθανότητα να αποκλίνει από την ποσότητα που εκτιμά περισσότερο από ε συγκλίνει στο 0 για οποιοδήποτε ε ($\varepsilon > 0$)

Πρόταση:

Ο εκτιμητής $T_n = T_n(X_1, \dots X_n)$ είναι συνεπής της $g(\theta)$ αν:

α) $E(T_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} g(\theta)$ (ασυμπτωτική αμεροληψία)

↳ ο εκτιμητής συγκεντρώνεται κοντά στο $g(\theta)$

β) $Var(T_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

↳ ο βαθμός συγκέντρωσής του είναι πολύ μεγάλος

Απόδειξη:

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Markov:
$\left(P(|W|>\varepsilon) \leq \frac{E(W^2)}{\varepsilon^2},\ \varepsilon>0\right)$.

για $W = T_n - g(\theta)$ παίρνουμε

$$P(|T_n - g(\theta)| > \varepsilon) \leq \frac{E(T_n - g(\theta))^2}{\varepsilon^2} = \frac{Var(T_n) + [E(T_n - g(\theta))]^2}{\varepsilon^2}$$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ από τις υποθέσεις (α), (β)

Παράδειγμα:

Έστω τ.δ $X_1, \dots X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$
Να δειχθεί ότι ο S^2 είναι συνεπής εκτιμητής της σ^2

Λύση:

Σύμφωνα με την πρόταση αρκεί να δειχθεί ότι $E(S^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^2$
και $Var\, S^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Γνωρίζουμε ότι $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$

Έτσι $E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = n-1 \iff \frac{\cancel{(n-1)}}{\sigma^2} E(S^2) = \cancel{(n-1)}$

$\Rightarrow \boxed{E(S^2) = \sigma^2}$

$Var\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1) \iff \frac{(n-1)^2}{\sigma^4} Var(S^2) = 2(n-1).$

$\iff Var(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ άρα S^2 συνεπής του σ^2.

Scanned with CamScanner

Παράδειγμα:
Έστω τ.δ $X_1, \dots X_n$ από $U(0,\theta)$, $\theta>0$
Να δειχθεί ότι $X_{(n)}$ είναι συνεπής εκτιμητής της θ.
Λύση:
Η σπ.π του πληθυσμού είναι:

$$f(x,\theta) = \begin{cases} 1/\theta, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}, \quad \theta>0$$

Η κατανομή του $X_{(n)}$ βρέθηκε

$$f_{X_{(n)}}(t,\theta) = \begin{cases} \frac{n}{\theta^n} t^{n-1}, & 0 \le t \le \theta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Έτσι: $E(X_{(n)}) = \int_0^\theta t \cdot f_{X_{(n)}}(t,\theta)\,dt = \int_0^\theta t \frac{n}{\theta^n} t^{n-1}\,dt.$

$$= \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta t^n\,dt = \frac{n}{(n+1)\theta^n} \cdot \left[t^{n+1}\right]_0^\theta = \frac{n}{n+1} \cdot \theta \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$$

και $E(X_{(n)}^2) = \int_0^\infty t^2 \cdot f_{X_{(n)}}(t,\theta)\,dt = \frac{n}{n+2}\theta^2.$

Άρα $Var(X_{(n)}) = E(X_{(n)}^2) - (E(X_{(n)}))^2 =$ ~~$\frac{(n+2)\,n^2}{(n+1)^2 (n+2)^2}\theta^2$~~

$$\frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2 = \frac{(n+1)^2 \cdot n \cdot \theta^2 - (n+2)n^2\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Scanned with CamScanner

Άρα $X_{(n)}$ είναι συνεπής της θ.

Επάρκεια - Πληρότητα:

Η επάρκεια διερευνάται με την εφαρμογή του Θεωρήματος Neyman-fisher.

Θεώρημα: Επάρκεια - Πληρότητα στη ΜΕΟΚ

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x, \theta)$ με $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ και Θ ένα διάστημα.

Αν $f(x, \theta)$ είναι η ΜΕΟΚ (μονοπαραμετρική εκθ. οικογ. κατανομή).

$$f(x, \theta) = c(\theta) h(x) \exp(Q(\theta) T(x)), \quad x \in A \subseteq \mathbb{R}$$

τότε

$\sum_{i=1}^{n} T(X_i)$ είναι το επαρκές και πλήρες στατιστικό

Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει για την ΠΕΟΚ.

Περιγραφή μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας

Έστω $X_1, \dots X_n$ τ.δ από μια άγνωστη κατανομή $f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ ή $\mathbb{R}^k$

έστω $x_1, \dots, x_n$ η παρατηρούμενη τιμή του $X_1, \dots, X_n$

Το δείγμα περιέχει τη μέγιστη δυνατή πληροφορία σε σχέση με τα άγνωστα χαρακτηριστικά θ του πληθυσμού.

Η μέγιστη πληροφορία περιέχεται στην από κοινού των $X_1, \dots X_n$.

$$f(\underset{\sim}{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i, \theta)$$

$$f(x_1, \dots, x_n, \theta) \simeq P_\theta(x_1 - \varepsilon_1 \leq X_1 \leq x_1 + \varepsilon_1, \dots, x_n - \varepsilon \leq X_n \leq x_n + \varepsilon)$$

με $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, \dots n$ οσοδήποτε μικρό.

Η παραπάνω πιθανότητα είναι η πιθανότητα πραγματοποίησης της τιμής $x_1, \dots, x_n$ του τ.δ $X_1, \dots X_n$
όμως η τιμή $x_1, \dots x_n$ έχει πραγματοποιηθεί άρα η πιθανότητα παίρνει τη μέγιστη τιμή της και αφού η πιθανότητα εξαρτάται απο το θ, αναζητάμε έναν εκτιμητή της θ μέσω της μεγιστοποίησης ως προς θ, της από κοινού κατανομής $f(\underset{\sim}{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i; \theta)$ για τη δεδομένη τιμή $x_1, \dots x_n$ του τ.δ

Ορισμός Συνάρτησης Πιθανοφάνειας:
Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x, \theta)$ $\theta \in \Theta$ και έστω $x_1, \dots, x_n$ η παρατηρηθείσα τιμή του $X_1, \dots, X_n$
Η συνάρτηση πιθανοφάνειας ή Πιθανοφάνεια του $x_1, \dots, x_n$. ορίζεται απο τη σχέση

$$L(\theta) = L(\theta | \underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i; \theta), \quad \theta \in \Theta$$

Η συνάρτηση $L(\theta | \underset{\sim}{x})$ θεωρείται συνάρτηση του $\theta \in \Theta$ και υπολογίζεται στην τιμή $\underset{\sim}{x} = (x_1, \dots x_n)$ του $X_1, \dots X_n$ η οποία έχει παρατηρηθεί.

Ο εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) της παραμέτρου $\theta \in \Theta$ προκύπτει απο την μεγιστοποίηση ως προς θ της $L(\theta)$ ή της $P_\theta(x_i - \varepsilon_i \le X_i \le x_i + \varepsilon_i, \ \forall i = 1, \dots n \ \varepsilon_i > 0)$
η οποία θα πρέπει να είναι αύξως ή αλλιώς μεγιστοποιημένη λόγω του γεγονότος ότι οι τιμές x_i των X_i, $i = 1, \dots n$ έχουν πραγματοποιηθεί

Ορισμός εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας (ΕΜΠ):
Έστω $L(\theta) = L(\theta | \underset{\sim}{x})$ η συνάρτηση πιθανοφάνειας του τ.δ $X_1, \ldots, X_n$. Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) της παραμέτρου $\theta \in \Theta$ συμβολίζεται με $\hat{\theta}$ ή $\hat{\theta}(\underset{\sim}{x}) = \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ και ορίζεται

$$L(\hat{\theta}(\underset{\sim}{x}) | \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta | \underset{\sim}{x})$$

ή $\hat{\theta}(\underset{\sim}{x}) = \arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta | \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x})$

Απλούστερα:
ο $\hat{\theta}$ είναι ΕΜΠ αν $L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in H} L(\theta)$

ή $\hat{\theta} = \arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$.

Παρατηρήσεις:

1. Για την εύρεση του ΕΜΠ υπολογίζεται η $\frac{d}{d\theta} L(\theta)$ και ο υποψήφιος ΕΜΠ της $\theta \in \Theta$ προκύπτει από την επίλυση ως προς θ της εξίσωσης: $\frac{d}{d\theta} L(\theta) = 0$ η οποία ονομάζεται εξίσωση πιθανοφάνειας. Αν η $\frac{d^2}{d\theta^2} L(\theta) < 0$ τότε η λύση ως προς θ της $\frac{d}{d\theta} L(\theta) = 0$ οδηγεί στον ΕΜΠ της $\theta \in \Theta$

Το μέγιστο της $L(\theta)$ μπορεί να επιτυγχάνεται για μία ή περισσότερες τιμές της θ ή να μην υπάρχει.

Scanned with CamScanner

② Στην εκθετική οικογένεια κατανομών: αντί να μεγιστοποιηθεί η $L(\theta)$ μεγιστοποιείται η $\log L(\theta)$.

③ Η τεχνική της μέγιστης πιθανοφάνειας εφαρμόζεται και όταν θ είναι πολυδιάστατη, ως τουλ. $\underset{\sim}{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^r$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} L(\underset{\sim}{\theta}) = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log(L(\underset{\sim}{\theta})) = 0, \quad i = 1, \dots r$$

και οι ΕΜΠ της $\underset{\sim}{\theta}$ προκύπτουν από την επίλυση του παρακάτω συστήματος εξισώσεων.

Παράδειγμα:

Έστω τ.δ. $X_1, \dots X_n$ από κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$

Να βρεθούν οι ΕΜΠ των μ και σ^2 στις περιπτώσεις

ⓘ σ^2 γνωστό και $\mu = \theta$ άγνωστο

Η πυκνότητα της $N(\mu, \sigma^2)$ κατανομής είναι

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$L(\theta) \overset{\text{op}}{=} \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\theta)^2}$$

$$\text{ή } L(\theta) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (x_i-\theta)^2}$$

$$\log L(\theta) = -n \log(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2$$

$$\frac{d}{d\theta}\log L(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta).$$

Εξισώνοντας με το 0 έχουμε $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)=0 \Rightarrow n\theta=\sum_{i=1}^{n}x_i$

$\Rightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} = \bar{x}$ άρα το $\bar{x}$ είναι υποψήφιο σημείο μεγίστου

$\frac{d^2}{d\theta^2}\log L(\theta)\Big|_{\theta=\bar{x}} < 0.$ άρα $\hat{\theta}=\bar{x}$

Παρατηρούμε ότι ταυτίζεται με τον ΑΟΕΔ της θ

(ii) μ γνωστό και σ^2 άγνωστο

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu,\theta) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{1}{2\theta}(x_i-\mu)^2} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\theta)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\log L(\theta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\theta) - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

$$\frac{d}{d\theta}\log L(\theta) = -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

$\frac{d}{d\theta}\log L(\theta)=0 \Rightarrow -n+\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$

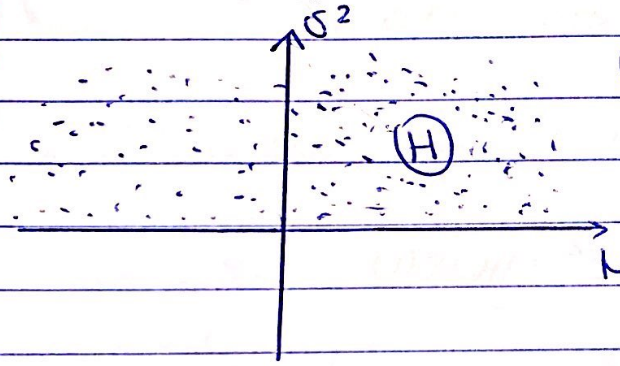
$\theta=\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2$

$\frac{d^2}{d\theta^2}\log L(\theta)<0$ στο σημείο $\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

Άρα $\hat{\theta}=\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$.

Ταυτίζεται με τον ΑΟΕΔ της σ^2.

(iii) μ, σ^2 άγνωστα



$\Theta=\{(\mu,\sigma^2): \mu\in\mathbb{R}, \sigma^2>0\}$

Ο παραμετρικός χώρος είναι το θετικό ημιεπίπεδο και η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι συνάρτηση και των δύο παραμέτρων μ, σ^2.

$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}(f x_i, \mu, \sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2}$

$=\frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$.

Παίρνοντας τις παραγώγους ως προς μ και σ^2

$$\frac{d}{d\mu}\log L(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

$$\frac{d}{d\sigma^2}\log L(\mu,\sigma^2)=\frac{-n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

και εξισώνοντας με το 0 έχουμε.

$$\mu=\bar{x} \quad \text{και} \quad \sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

Εφαρμόζοντας και το κριτήριο των 2ων παραγώγων οι ΕΜΠ των παραμέτρων μ και σ^2 είναι

$$\hat{\mu}=\bar{X} \quad \text{και} \quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

Παρατήρηση: Γενικά οι ΕΜΠ δεν συμπίπτουν πάντα με τους αντίστοιχους ΑΟΕΔ εκτιμητές

Παράδειγμα (Κατανομή Poisson)

Έστω τ.δ $X_1,\dots,X_n$ από κατανομή Poisson (θ), $\theta>0$

Να προσδιοριστεί ο ΕΜΠ της παραμέτρου θ

Λύση:

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}P_X(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!}=\frac{e^{-n\theta}\cdot\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

$$\log L(\theta)=-n\theta+\sum_{i=1}^{n}x_i(\log\theta)-\sum_{i=1}^{n}\log(x_i!)$$

$$\frac{d}{d\theta}\log L(\theta)=-n+\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

Η εξίσωση πιθανοφάνειας δίνει $\frac{d}{d\theta}\log L(\theta)=0$

Scanned with CamScanner

$\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$.

Η $\frac{d^2}{d^2\theta} \log L(\theta) \Big|_{\theta=\bar{x}} < 0$ και έτσι η τιμή $\theta = \bar{x}$ μεγιστοποιεί τη συνάρτηση πιθανοφάνειας.

Άρα ο ΕΜΠ της θ είναι $\hat{\theta} = \bar{x}$ και ταυτίζεται με τον ΑΟΕΔ εκτιμητή της θ.

Scanned with CamScanner